ΘΕΩΡΗΜΑ (Υποβ. τάξης) Ας είναι y_1 μια λύση της (E_0^n) με $y_1(x) \neq 0$, $x \in I$. Τότε για $y = u y_1$, $v = u'$ η (E_n^0) μετάγεται σε μια ομογενή γ.δ.ε $n-1$ τάξης (E_0^*) αν $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ είναι ένα β.σ.λ της (E_0^*) και $y_i(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} v_{i-1}(s)\,ds$, $x \in I$, $i = 2, \dots, n$ τότε το σύνολο $\{y_1, y_2 \dots y_n\}$

Είναι ένα βασικό σύνολο της (E_0^n)

Απόδειξη Ας είναι y_1 λύση της (E_0^n) με $y_1(x) \neq 0$, $x \in I$.

Για $y = u y_1$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 \quad & y = u y_1 \\
\alpha_1 \quad & y' = u y_1' + u' y_1 \\
\alpha_2 \quad & y'' = u y_1'' + 2u' y_1' + u y_1'' \\
& \dots \\
\alpha_{n-1} \quad & y^{(n-1)} = u \cdot y_1^{(n-1)} + \binom{n-1}{1} u' y_1^{(n-2)} + \dots + (n-1) u y_1^{(n-2)} + u^{(n-1)} y_1 \\
\alpha_n \quad & y^{(n)} = u\, y_1^{(n)} + n u' y_1^{(n-1)} + \dots + \dots u^{(n)} y_1
\end{aligned}
$$

Άθροισμα

$u \cdot [\alpha_0 y_1 + \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_1'' + \dots + \alpha_{n-1} y_1^{(n-1)} + \alpha_n y^{(n)}] \to 0$

$+ u' [\alpha_1 y_1 + \alpha_2 \cdot 2 y_1' + \dots + n \alpha_n y_1^{(n-1)}]$

$+ 1 \cdot u^{(n)} \cdot y_1$

$\Rightarrow 0 = u' A_1 + u'' A_2 + \dots + A_n u^{(n)}$ $\quad$ $0 = A_1 v + \dots + A_{n-1} v^{(n-1)}$ (E_0^*)

$u' = v \Rightarrow$

$u'' = v'$ $\quad$ $u^{(n)} = v^{(n-1)}$

Ας είναι $\{V_1,\dots,V_n\}$ β.σ.λ της (E_0^*) και προφανώς, οι συναρτήσεις $y_1,\dots,y_n$ είναι λύσεις της (E_0^n) αρκεί να αποδείξω ότι οι λύσεις $y_1,\dots,y_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες

Για $c_1,\dots,c_n$ πραγματικές σταθερές με

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\dots+c_ny_n(x)=0, \quad x\in I$$

Τότε $c_1y_1(x)+c_2y_1(x)\int_{x_0}^{x}V_1(s)ds+\dots+c_ny_1(x)\cdot\int_{x_0}^{x}V_{n-1}(s)ds=0, \quad x\in I.$

$$y_1(x)\cdot\left[c_1+c_2\int_{x_0}^{x}V_1(s)ds+\dots+c_n\int_{x_0}^{x}V_{n-1}(s)ds\right]=0.$$

$\left.\begin{matrix} y_1(x)\neq 0 \\ x\in I\end{matrix}\right]$

$$c_2V_1(x)+\dots+c_nV_{n-1}(x)=0, \quad x\in I \Rightarrow c_2=\dots=c_n=0$$

και συνεπώς $c_1y_1(x)=0, \ x\in I$

άρα και $c_1=0$.

#

Παράδειγμα 6 (ΒΙΒΛΙΟΥ)

$$x^3y'''-4x^2y''\overset{+9xy'}{-4xy'}-9y=0, \quad x>0 \qquad y_1(x)=x$$

$$\begin{cases} y=ux \\ y'=u'x+u \end{cases}$$

$$x^3(u'''x+3u''\cdot 1+0+0)-4x^2(u''x+2u'\cdot 1+0)$$
$$+9x(u'x+u)-9ux=0$$

$$x^4u'''+3x^3u''-4x^3u''-8x^2u'+9x^2u'+\cancel{9xu}-\cancel{9xu}=0.$$

$$x^4 u''' - x^3 u'' + x^2 u' = 0$$

$\underline{u' = v}$ $\quad \{x^4 v'' - x^3 v' + x^2 v = 0.\}$

$$\boxed{(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} + \dots + \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} + \dots + f g^{(n)}}$$

$$\boxed{x^2 v'' - x v' + v = 0 \quad , x > 0}$$

$$\begin{cases} V_1(x) = x \\ V_2(x) = x \log x \end{cases}$$

$C_1 x + C_2 x \log x = 0, \ x > 0$

$x = 1 . \ C_1 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$ αρα και $\boxed{C_2 = 0}$

οπότε είναι γρ. ανεξάρτητες.

$y_2(x) = y_1(x) \int_1^x s\, ds \ (1), x > 0$

$y_3(x) = y_1(x) \int_1^x (s \log s)\, ds \ , x > 0.$

$(1) \to y_2(x) = x \cdot \int_1^x s\, ds = x \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(x^3 - x), x > 0.$

$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_1(x) \ , x > 0$

HW $\to$ 7, 8 σελ. 83.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.
Τι ακριβώς συμβαίνει στον τύπο $\circledast$ $\frac{1}{y_1^2(x)}$

ΠΡΟΟΔΟΣ 9-12-19

Παράδειγμα 1: $(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0,\ x > -\frac{1}{2}$

$y_1 = e^{c \cdot x}$

$$c^2 \cdot (2x+1) \cdot e^{cx} - 4(x+1) \cdot c \cdot e^{cx} + 4e^{cx} = 0$$

$$\Rightarrow c^2(2x+1) - 4(x+1)c + 4 = 0,\ x > -\frac{1}{2} \rightsquigarrow \boxed{c=2}$$

$y = u \cdot e^{2x}$

$$(2x+1)(u'' e^{2x} + 2u' \cdot 2 \cdot e^{2x} + u \cdot 4 \cdot e^{2x})$$

$$-4(x+1)(u' \cdot e^{2x} + 2 \cdot u \cdot e^{2x}) + 4 \cdot u \cdot e^{2x} = 0.$$

$$(2x+1)u'' + u'\underbrace{[4(2x+1) - 4(x+1)]}_{8x+4-4x-4} + u\underbrace{[(2x+1) \cdot 4 - 4(x+1) \cdot 2 + 4]}_{0}.$$

$u' = v$

$(2x+1)v' + 4xv = 0.$

$$v(x) = e^{-\int_0^x \frac{4s}{2s+1} ds}$$

$$\cdot \int_0^x \frac{4s}{2s+1} ds = 2\int_0^x \left(\frac{2s+1}{2s+1} - \frac{1}{2s+1}\right) ds =$$

$$= 2 \cdot \left[\int_0^x ds - \int_0^x \frac{1}{2s+1} ds\right] = 2x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(2s+1)$$

$y_1(x) = e^{2x}(2x+1),\ x > -\frac{1}{2}$

$e^{2x},\ e^{2x}\int_0^x v_1(s) ds$

$\{ e^{2x},\ e^{2x}\int_0^x (2s+1) ds \}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 8: Ας είναι $y_1, \dots, y_n \in C^n(I)$ με $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$ $x \in I$, τότε υπάρχει μια μοναδική ομογενής γ.δ.ε n-τάξης με συντελεστή του $y^{(n)}$ τη μονάδα $(a_n = 1)$ και τέτοια ώστε το σύνολο $\{y_1, \dots, y_n\}$ να είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης. Η γ.δ.ε είναι η

$$\frac{W(y_1, \dots, y_n, y)(x)}{W(y_1, \dots, y_n)(x)} = 0, \ x \in I.$$

Απόδειξη

$$W(y_1, \dots, y_n, y)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}$$

(ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟ) $\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \\ y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_1 y' + b_0 y = 0 \end{cases}$

$(a_r - b_r) y^{(r)} + \dots + (a_0 - b_0) y = 0 \quad 0 < r < n$ HW

Εφαρμογές: 1) $m'(t) = -k m(t)$ εξίσωση διάσπασης

$m'(t) + k m(t) = 0$

$m(t) = m(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} k \, ds} = m(t_0) \cdot e^{-k(t-t_0)}$

$m(t) = m(t_0) \cdot e^{-k(t-t_0)}, \ t \in I$. Εξίσωση μάζας στο χρόνο.

$m(t_1) = m(t_0) = e^{-k(t-t_0)}$

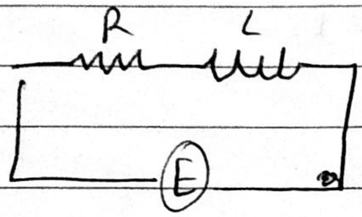
No. Date

2) Κυκλώματα.

R $\qquad \mathcal{E}_R = R\cdot I(t)$

L $\qquad E_L = L\cdot \frac{\partial I(t)}{\partial t}$

C $\qquad E_C = \frac{Q(t)}{C}$



$E(t) = E_R + E_L$

$R\, I(t) + L\frac{\partial I(t)}{\partial t} = E(t)$

Εξίσωση 1ης τάξης

$$I'(t) + \frac{R}{L}\cdot I(t) = \frac{1}{R}\, E(t) \qquad \boxed{t \geq 0}$$

$$= \quad I(t) = e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{R}{L}ds}\left[I(t_0) + \int_{t_0}^{t}\frac{1}{R}\cdot E(s)\cdot e^{\int_{t_0}^{s}\frac{R}{L}du}ds\right]$$

$$= e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\left[I(t_0) + \frac{E}{R}\cdot\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{R}{L}du}ds\right]$$

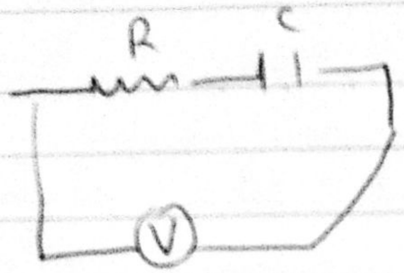
Για το $E(t)$.

$\cancel{I(t) = c\, e^{-\frac{1}{RC}t}}$

Συνεχές ρεύμα $\quad I(t) \simeq c\cdot e^{\frac{1}{RC}t}$

$$I(t) = c\cdot e^{-\frac{1}{RC}} + \frac{\omega_0 E C}{\sqrt{1+\dots}}\sin(\omega t +$$

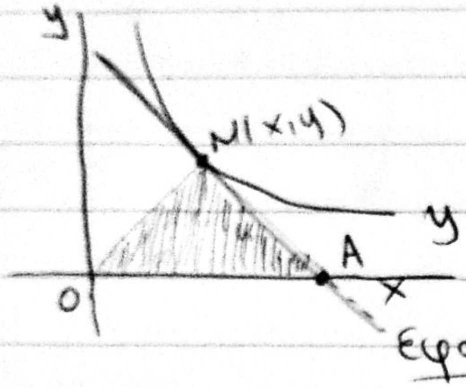
3)



$$E(t) = RI(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

$$\rightsquigarrow Q(t) \to I(t) = Q'(t).$$

4)



Να βρεθεί η εξίσωση μιας καμπύλης $y = f(x)$ με την ιδιότητα σε κάθε σημείο M της καμπύλης η εφαπτόμενη και η επιβατική ακτίνα σχηματίζουν με τον (Ox) τρίγωνο σταθερού εμβαδόν 1.

Βρίσκουμε το Εμβαδόν του ΟΑΜ και καταλήγει σε Εξίσωση α' τάξης.

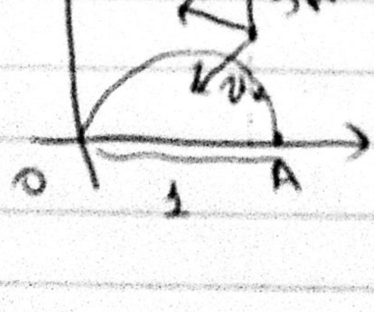
~~$(OAM) = \frac{1}{2} OA$~~

4) Έχουμε ένα ποτάμι.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να βρεθεί η εξίσωση της καμπ. που ακολουθεί ο κολυμβητής

↳ μέχρι Δευτέρα.



$M_x =$